Alain Guimier

Une démonstration détaillée du théorème de nullstellensatz pour les formes quadratiques ou caractérisation d'une forme quadratique, à un coefficient multiplicateur près, par le cône d'isotropie s'il n'est pas réduit à son radical.

07/04/2024

Le but de cet exposé est d'établir une démonstration détaillée du théorème caractérisant les formes binéaires symétriques , ayant un cône d'isotropie non réduit à $\{0\}$, à un coefficient multiplicateur près , par le cône d'isotropie .
Ce théorème est la clef de voûte de la théorie de la relativité restreinte car grâce aux hypothèses d'invariance du cône luminifaire et de l'bsence d'observateur privilègié permet de caractériser les matrices de Lorentz .

On rapelle tout d'abord un théorème similaire pour les formes linéaires qui est utilisé pour la démonstration qui nous intéresse ainsi que d'autres résultats nécessaires .
On suppose acquises les notions d'espaces vectoriels réels de dimension finie , d'espaces supplémentaires, de formes bilinéaires symétriques, de formes quadratiques, d'espaces topologiques , métriques .. Voir par exemple [**1**], [**2**], [**3**] ...

Définition :
Soit $\boldsymbol{E}$ *un espace vectoriel de dimenension* $\boldsymbol{n \geq 2}$ *sur* $\mathbb{R}$.
On apelle hyperplan tout $-$ *sous espace vectoriel de dimesion* $\boldsymbol{n-1}$.
Lemme 1 :
Soit une forme linéaire $\boldsymbol{f : E \to \mathbb{R}, f \neq 0}$ *, son noyau* $\boldsymbol{Ker(f) = \{x \mid f(x) = 0\}}$
est un hyperplan qui vérifie $\boldsymbol{E = Ker(f) \bigoplus D}$. $\boldsymbol{D}$ *étant une droite non contenue dans* $\boldsymbol{Ker(f)}$.
Démonstration :
$\boldsymbol{Ker(f)}$ *est évidemment un sous* $-$ *espace vectoriel de* $\boldsymbol{E}$.
Si $\boldsymbol{f \neq 0 \ \exists\, v}$ *tel que* $\boldsymbol{f(v) \neq 0}$ *• Soit la droite* $\boldsymbol{D = \mathbb{R} \cdot v}$ *et montrons que*
$$\boldsymbol{E = Ker(f) \bigoplus D}.$$
$(\boldsymbol{a})$ $\boldsymbol{Ker(f) \cap D = \{0\}}$ *car si non si* $\boldsymbol{x = \lambda \cdot v}$ *et* $\boldsymbol{f(x) = 0}$.
Comme $\boldsymbol{f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v) = 0}$ *et* $\boldsymbol{f(v) \neq 0}$, $\boldsymbol{\lambda = 0}$ *et donc* $\boldsymbol{Ker(f) \cap D = \{0\}}$.
$(\boldsymbol{b})$ $\boldsymbol{Ker(f) + D = E}$.
$$\text{Soit } \boldsymbol{x \in E},\ \boldsymbol{\lambda = \frac{f(x)}{f(v)}} \text{ et } \boldsymbol{y = x - \lambda \cdot v}.$$
$$\boldsymbol{f(y) = f(x - \lambda \cdot v) = f(x) - \frac{f(x)}{f(v)} \cdot f(v)} \text{ et donc } \boldsymbol{y \in Ker(f)}.$$
On peut écrire que $\boldsymbol{x = (x - \lambda \cdot v) + \lambda \cdot v}$.
On en déduit que $\boldsymbol{Ker(f)}$ *est de dimension* $\boldsymbol{n-1}$.
Théorème 1 : (*nullstellensatz pour les formes linéaires ou caractérisation d'une forme linéaire à un coefficient multiplicateur près par son noyau*).
Soit $\boldsymbol{f}$ *et* $\boldsymbol{g}$ ***2*** *formes linéaires sur l'espace vectoriel* $\boldsymbol{E}$.
On a l'équivalence suivante :
$$\boldsymbol{Ker(f) = Ker(g) \Leftrightarrow \exists\, \lambda \neq 0} \text{ tel que } \boldsymbol{f = \lambda \cdot g}.$$
Démonstration :
Si $\boldsymbol{H = Ker(f) = Ker(g) = E \quad f = g = 0}$ *sinon* $\boldsymbol{\exists\, v \notin H : f(v) \neq 0}$ *et* $\boldsymbol{g(v) \neq 0}$.

Soit $\lambda = \frac{f(v)}{g(v)}$. Montrons que $f = \lambda \cdot g$.

D'après le lemme précédent $E = Ker(f) \bigoplus \mathbb{R} \cdot v$.

Soit $x \in E$, on peut écrire $x = y + \mu \cdot v$, $y \in Ker(f) = Ker(g)$:

$f(x) = f(y + \mu \cdot v) = \mu \cdot f(v) = \mu \cdot \lambda \cdot g(v) = \lambda \cdot g(y + \mu \cdot v)$

$= \lambda(g(y) + \mu \cdot g(v)) = \lambda \cdot g(y + \mu \cdot v) = \lambda \cdot g(x)$.

La réciproque est immédiate .

Lemme 2 :

L'intérieur d'un hyperplan H d'un espace vectoriel E normé de dimension finie $n \geq 2$ est vide .

Démonstration :

Sinon il contient une boule ouverte $B(x, \varepsilon) \subseteq H$.

On a : $B(0, \varepsilon) = B(x, \varepsilon) - x \subseteq H - x = H$.

Soit $\mathcal{B}(e_1, ..., e_n)$ une base normée de E , $\mathcal{B}\left(\frac{\varepsilon}{2} \cdot e_1, ..., \frac{\varepsilon}{2} e_n\right)$ est encore une base de E .

Comme $\frac{\varepsilon}{2} \cdot e_i \in B(0, \varepsilon) \subseteq H$ pour $i = 1, \cdots, n$, H contient n vecteurs indépendants ,

ce qui est impossible .

Lemme 3 :

Soit E un espace métrique et $A \subseteq E$: $int\left(C_E A\right) = C_E(adh(A))$.

Démonstration :

Si $x \in C_E adh(A)$, $x \notin adh(A)$ alors $\exists B(x, \rho) \subseteq C_E A$ tel que $B(x, \rho) \cap A = \varnothing$,

et donc $x \in int(C_E A)$.

Réciproquement si $x \in int(C_E A), \exists B(x, \rho) \subseteq C_E A$. Si x appartenait à l'adhérence de A,

$\forall B(x, \varepsilon)$ $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ en particulier pour $\varepsilon = \rho$. D'où contradiction .

Lemme 4 :

Soit f et g 2 applications continues d'un espace métrique E dans un espace métrique E'.

Alors le sous − ensemble $A = \{x \in E / f(x) = g(x)\}$ est fermé dans E .

Démonstration :

Montrons que $E \setminus A$ est ouvert . Soit $a \in E \setminus A$ alors $f(a) \neq g(a)$ et $d(f(a), g(a)) = \alpha > 0$.

Comme f et g sont continues il existe un voisinage $\mathcal{V}(a)$ dans E tel que :

$\forall x \in \mathcal{V}(a)$ $d(f(x), f(a)) < \frac{\alpha}{2}$ et $d(g(x), g(a)) < \frac{\alpha}{2}$.

Montrons que $\forall x \in \mathcal{V}(a)$ $f(x) \neq g(x)$: car sinon $\exists x$ tel que $f(x) = g(x)$

et par l'inégalité triangulaire $d(f(a), g(a)) < \alpha$ et donc $\mathcal{V}(a) \subseteq E \setminus A$.

Lemme 5 :

Soit f et g 2 applications continues d'un espace métrique E dans un espace métrique E'.

Si $A = \{x \in E / f(x) = g(x)\}$ est dense dans E alors $f = g$ sur E.

Démonstration :

Comme A est fermé par le lemme précédent $A = adh(A) = E$ par densité .

Notation :

Soit E un espace vectoriel réel et une forme bilinéaire $\varphi(\cdot,\cdot) : E \times E \to E$ et la forme quadratique Φ associée • On note :

$\mathcal{C}(\Phi) = \{u / \Phi(u) = 0\}$, $Rad(\Phi) = \{x / \forall y \ , \varphi(x,y) = 0\}$.

$\mathcal{C}$ étant appelé cône d'isotropie de Φ et Rad radical de Φ.

Par exemple pour la forme quadratique $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$, son radical est $\{0\}$.

Théorème 2 :
(nullstellensatz pour les formes quadratiques ou caractérisation d'une forme quadratique à un coefficient multiplicateur près par le cône d'isotropie s'il n'est pas réduit à son radical)

Soit Φ et Φ' 2 formes quadratiques définies sur un espace vectoriel réel E telle que $\mathcal{C}(\Phi) \neq Rad(\Phi)$ on a l'équivalence suivante :

$\mathcal{C}(\Phi) = \mathcal{C}(\Phi') \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0$ tel que $\Phi = \lambda \cdot \Phi'$.

Démonstration : (On suit partiellement la démonstration de [2] p 254)

Soit $x \in \mathcal{C}(\Phi) \setminus Rad(\Phi)$, x est fixé une fois pour toute.

(A)

Soit y tel que $\varphi(x,y) \neq 0$, i·e· $y \notin Ker(\varphi(x,\cdot)) \neq E$:

y existe car sinon : $\forall y, \varphi(x,y) = 0$ et alors $x \in Rad(\Phi)$.

On pose $u = x + t \cdot y$, $t \in \mathbb{R}$, et on détermine les u tel que $u \in \mathcal{C}(\Phi) = \mathcal{C}(\Phi')$ • Pour cela on pose les 2 équations suivantes :

$$0 = \Phi(u) = 2 \cdot t \cdot \varphi(x,y) + t^2 \cdot \Phi(y) \qquad (1)$$

$$0 = \Phi'(u) = 2 \cdot t \cdot \varphi'(x,y) + t^2 \cdot \Phi'(y) . \qquad (2)$$

(a)

Si $\Phi(y) \neq 0$ et donc $\Phi'(y) \neq 0$ on a les solutions :

pour (1) $t = 0$ et $t = -2 \cdot \dfrac{\varphi(x,y)}{\Phi(y)}$,

pour (2) $t = 0$ et $t = -2 \cdot \dfrac{\varphi'(x,y)}{\Phi'(y)}$

Comme $\mathcal{C}(\Phi) = \mathcal{C}(\Phi')$ les solutions sont identiques pour ces 2 équations :

En particulier $\dfrac{\varphi(x,y)}{\Phi(y)} = \dfrac{\varphi'(x,y)}{\Phi'(y)}$ et donc : $\dfrac{\varphi'(x,y)}{\varphi(x,y)} = \dfrac{\Phi'(y)}{\Phi(y)} \neq 0$. $\qquad (3)$

Donc pour $y \notin Ker(\varphi(x,\cdot))$ et $\Phi(y) \neq 0$: $\dfrac{\varphi'(x,y)}{\varphi(x,y)} = k(y) \neq 0$.

On en déduit que $\forall y$ tel que $\Phi(y) \neq 0$, $\varphi(x,y) \neq 0 \Leftrightarrow \varphi'(x,y) \neq 0$. $\qquad (4)$

(b)

Si $\Phi(y) = 0$ on a :

(1) $0 = \Phi(u) = 2 \cdot t \cdot \varphi(x,y)$

(2) $0 = \Phi'(u) = 2 \cdot t \cdot \varphi'(x,y)$

Comme $\varphi(x,y) \neq 0$, $t = 0$ et comme les solutions sont identiques pour ces 2 équations, nécessairement $\varphi'(x,y) \neq 0$ et réciproquement .

On en déduit que $\forall y$ tel que $\Phi(y) = 0$, $\varphi(x,y) \neq 0 \Leftrightarrow \varphi'(x,y) \neq 0$ • (5)

(c)

On en déduit de (4) et (5) que :

$\forall y \ , \varphi(x,y) \neq 0 \Leftrightarrow \varphi'(x,y) \neq 0$.

Ce qui implique que $Ker(\varphi(x,\cdot)) = Ker(\varphi'(x,\cdot))$ d'où (théorème 1) :

$\exists\, k$ *fixé* $\neq 0$ *tel que* $\varphi(x,\cdot) = k\cdot\varphi'(x,\cdot)$.

(B)

D'aprés (3) : $\exists\, k \neq 0 \;\; \forall y \in C_E Ker(\varphi(x,\cdot)) \cap C_E \mathcal{C}(\Phi) : \Phi(y) = k \bullet \Phi'(y)$.

Si $y \in \mathcal{C}(\Phi)$ *alors* $\Phi(y) = \Phi'(y) = 0$ *et on a aussi* $\Phi(y) = k \bullet \Phi'(y)$ *pour* $y \in \mathcal{C}(\Phi)$.

Donc **:**

$\exists\, k \neq 0 \;\; \forall y \in \left(C_E Ker(\varphi(x,\cdot)) \cap C_E \mathcal{C}(\Phi)\right) \cup \mathcal{C}(\Phi) = C_E Ker(\varphi(x,\cdot)) \cup \mathcal{C}(\Phi)$:

$\Phi(y) = k \bullet \Phi'(y)$.

En particulier $\exists\, k \neq 0 \;\; \forall y \in C_E(Ker(\varphi(x,\cdot))) : \Phi(y) = k \bullet \Phi'(y)$.

Comme $int(Ker(\varphi(x,\cdot))) = \varnothing$ *(lemme* 2*) on a :*

$adh\left(C_E(Ker(\varphi(x,\cdot)))\right) = C_E(int(Ker(\varphi(x,\cdot)))) = E$ *(lemme* 3*)*

donc $C_E(Ker(\varphi(x,\cdot)))$ *est dense dans* E .

Φ *et* Φ' *étant continues sur* E *et comme sur* $C_E(Ker(\varphi(x,\cdot))) : \Phi = k \bullet \Phi'$

alors $\Phi = k \bullet \Phi'$ *sur* E *(lemme* 5*)* **:**

La réciproque est immédiate .

Pour d'autres démonstrations voir [*4*] *p 274* , [*5*] *p 28* , [*6*] *p 80* .

Bibliographie :

[**1**] ***J***. *Dieudonné*."Eléments d'analyse " *• Gauthier − villars 1969 •*

[**2**] *R • Goblot* ."Algébre linéaire "*Masson 1995* .

[**3**] *J − M. Monier.*"Algèbre 1 et 2". *Dunod 1997* .

[**4**] *Clément de Séguin Pazzis. Invitation aux formes quadratiques. Calvage et Mounet 2010.*

[**5**] *A Debreil Formes quadratiques et géométrie. Calvage et Mounet 2017.*

[**6**] *N • M • J Woodhouse Springer 2002.*